Toets 3 Lineaire Algebra, vrijdag 19 december 2003

De toets bestaat uit 4 vraagstukkken. U krijgt [redacted] 75 minuten om deze vraagstukken te beantwoorden. De puntenwaardering kunt u vinden aan het einde van de vraagstukken.

1. Stel $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

a. Stel dat $A^2 = 0$. Toon aan dat A niet inverteerbaar is.

b. Stel $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $B \neq 0$. Stel dat $AB = 0$. Kan A dan inverteerbaar zijn? Leg uit.

2. Stel $\mathcal{V}$ een vectorruimte over $\mathbb{R}$, met dimensie n. Stel β een geordende basis. Laat $\phi_\beta : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^n$ de afbeelding zijn die aan elke v zijn coordinaatvector ten opzichte van de basis β toevoegt, i.e.

$$\phi_\beta(v) = [v]_\beta.$$

Toon aan dat ϕ_β een isomorfisme is.

3. In $\mathbb{R}^2$, laat L de lijn zijn, gegeven door de vergelijking $y = x$. Stel $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de lineaire afbeelding die aan elke $v \in \mathbb{R}^2$ de projectie $T(v)$ op de lijn L toevoegt (projectie langs de lijn loodrecht op L).

a. Bepaal de matrix van T met betrekking tot de basis $\beta' := \{(1,-1),(1,1)\}$.

b. Bepaal de matrix van T met betrekking tot de natuurlijke basis $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$.

4. Bepaal de rang en de inverse van de 3×3 matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puntenwaardering:

Vraagstuk 1: 21
Vraagstuk 2: 24
Vraagstuk 3: 24
Vraagstuk 4: 21